SESIÓN 4

EL PROBLEMA DE LA RECTA TANGENTE, CÁLCULO DE LÍMITES, CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDAD

I. CONTENIDOS:

1. El problema de la recta tangente a una curva
2. Límites por la derecha y por la izquierda
3. Concepto de continuidad y discontinuidad de una función
4. Definición formal de límite y su metodología de calculo
5. Cálculo del límite de una función
6. Ejercicios resueltos
7. Estrategias Centradas en el Aprendizaje: Ejercicios propuestos

II. OBJETIVOS:

Al término de la Clase, el alumno:

- Comprenderá como surgen los límites al tratar de hallar la tangente a una curva.
- Desarrollará la habilidad para calcular límites
- Entenderá el concepto de continuidad y discontinuidad.

III. PROBLEMATIZACIÓN:

Comenta las preguntas con tu Asesor y selecciona las ideas más significativas.

- ¿Cómo representarías gráficamente un límite que tiende al infinito?
- ¿Qué fundamentos expondrías para asegurar que algo es continuo?
- ¿Cómo explicarías el término discontinuidad si habláramos de una gráfica?

IV. TEXTO INFORMATIVO-FORMATIVO:

1.1. El problema de la recta tangente a una curva

A continuación veremos cómo surgen los límites cuando nuestro problema es calcular la tangente a una curva. La etimología de la palabra *tangente* se derivada del latín *tangens,* que quiere decir "tocar". Bajo este orden de ideas, una tangente a una curva es una recta que toca a esta en un punto. En su tratado de geometría, Euclides define a la tangente diciendo que es una recta que toca en un punto y solo en uno a un círculo. Esta definición está restringida a un círculo, ya que es inadecuada para curvas de una geometría más complicada (ver fig.)

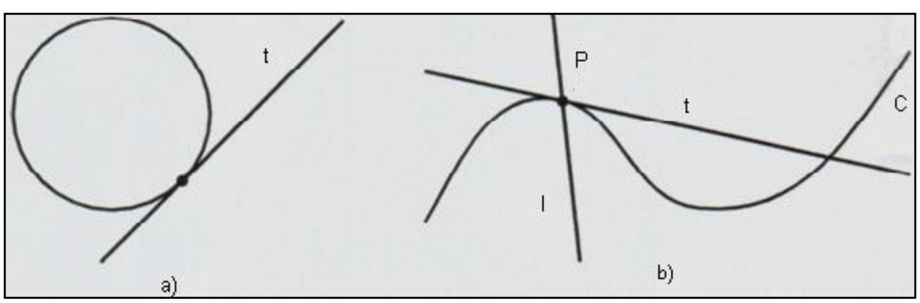


Fig. 1

En la fig 1b, se muestran dos rectas, *l* y *t,* que pasan por un punto P de una curva C. La recta *l* interseca a la curva C solo una vez, pero podemos ver que se parece a la que definimos como una tangente. Por otro lado, la recta *l* se asemeja a una tangente, sin embargo interseca a la curva C dos veces.

Muchas veces en las ciencias exactas, ingeniería, ciencias biológicas, médicas, económicas, sociales o administrativas resulta muy complicado o impráctico modelar el comportamiento de un fenómeno mediante una ecuación explícita; ya que en la práctica los datos se obtienen experimentalmente, los cuales por lo general nos definen curvas. Fenómenos del mundo real como el crecimiento de una población, la tendencia en el consumo de gasolina, el crecimiento del número de derechohabientes de una institución de salud, la cantidad de productos formados por unidad de tiempo en una reacción química, la curva de temperatura registrada por un paciente en una unidad médica, etc. son apenas algunos ejemplos de la aplicación del análisis de curvas.

Para ilustrar esta idea, resolvamos el problema de intentar encontrar una recta tangente *t* a la parábola definida por la ecuación $y = x^2$ en el punto P (1,1).

Solución: Para encontrar la ecuación de la recta tangente *t* debemos conocer su pendiente (*m*). La dificultad que encontramos para esto es que solamente conocemos un punto, P, de la recta tangente *t,* recordando de nuestros cursos de geometría analítica, se requiere conocer dos puntos de la curva para calcular su pendiente. Sin embargo podemos salvar este inconveniente si elegimos un punto Q(x,y) cercano a P de la curva y calcular la pendiente m_{pq} de la recta secante PQ.

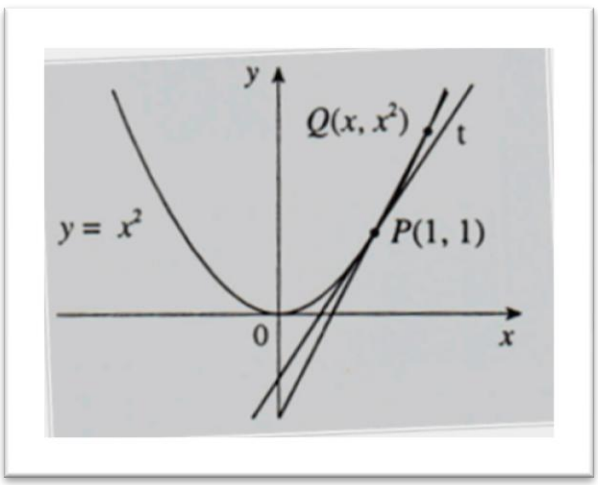


Fig. 2

Elegimos el punto x ≠ 1, de tal manera que el punto Q ≠ P, si escogemos el punto Q un poco arriba del punto P , digamos en el punto x = 1.5, entonces y = $(1.5)^2$ = 2.25, el punto Q tendrá por coordenadas Q (x, x^2), como queremos calcular la pendiente en el punto P, este tendrá por coordenadas P(x_1, y_1) y el punto Q tendrá por coordenadas Q(x_2, y_2), empleando la fórmula para calcular la pendiente de una recta que se apoya en dos puntos:

$$m = \frac{x_{2-x_1}}{y_2 - y_1}$$

Sustituyendo valores para nuestra recta PQ y conociendo los puntos específicos sobre los que se apoya, entonces:

$M_{PQ} = \frac{2.25-1}{1.5-1} = \frac{1.25}{0.5} = 2.5$ Que es el valor de la pendiente de recta PQ en el punto x = 1, observe que de acuerdo al punto Q escogido este se movió por la “derecha “para situarse muy cerca del punto P, pero pudimos haber escogido un punto abajo del punto P y situarlo cerca del punto P, en esta caso el punto escogido Q se hubiera movido por la “izquierda” para situarse cerca del punto P.

siguiendo el mismo procedimiento descrito para calcular la pendiente podemos acercarnos por la derecha o por la izquierda al punto de nuestro interés, independientemente de esto se llegará al mismo resultado, En las siguientes tablas se muestran los valore de m_{PQ} para valores de x cercanos a 1, podemos apreciar que entre más cerca esta Q de P más lo estará x de 1y entonces podemos ver en las tablas que m_{PQ} se aproxima a 2. Intuimos que la pendiente de la recta tangente *t* debe ser m_{PQ} = 2

x	m_{PQ}
2	3
1.5	2.5
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001

x	m_{PQ}
0	1
0.5	1.5
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999

Fig. 3

Si hemos comprendido este concepto, podemos decir entonces que la pendiente de la recta tangente es el *límite* de las pendientes de las rectas secantes, simbólicamente esto lo podemos expresar de la siguiente forma:

$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = m$$

Por lo que aplicado a nuestro ejemplo específico: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$

Con este valor que calculamos para la pendiente de la recta tangente, podemos usar la forma punto- pendiente de la ecuación de una recta para obtener la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto (1,1). De nuestro curso de Geometría Analítica recordemos que esta forma es:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

y su forma simplificada cuando se conoce su pendiente y la distancia de la ordenada al origen “ b” es:

$$y = mx + b$$

Por lo que podemos escribir: $y - 1 = 2\,(x - 1)$ o en su forma simplificada: $y = 2x - 1$

2.1. Límites por la derecha y por la izquierda

En las siguientes gráficas se ilustra el proceso de hacer tender el límite por la derecha o por la izquierda del ejemplo, a medida de que Q se aproxima a P a lo largo de la parábola, las rectas secantes giran en torno a P y se acercan a la tangente *t.*

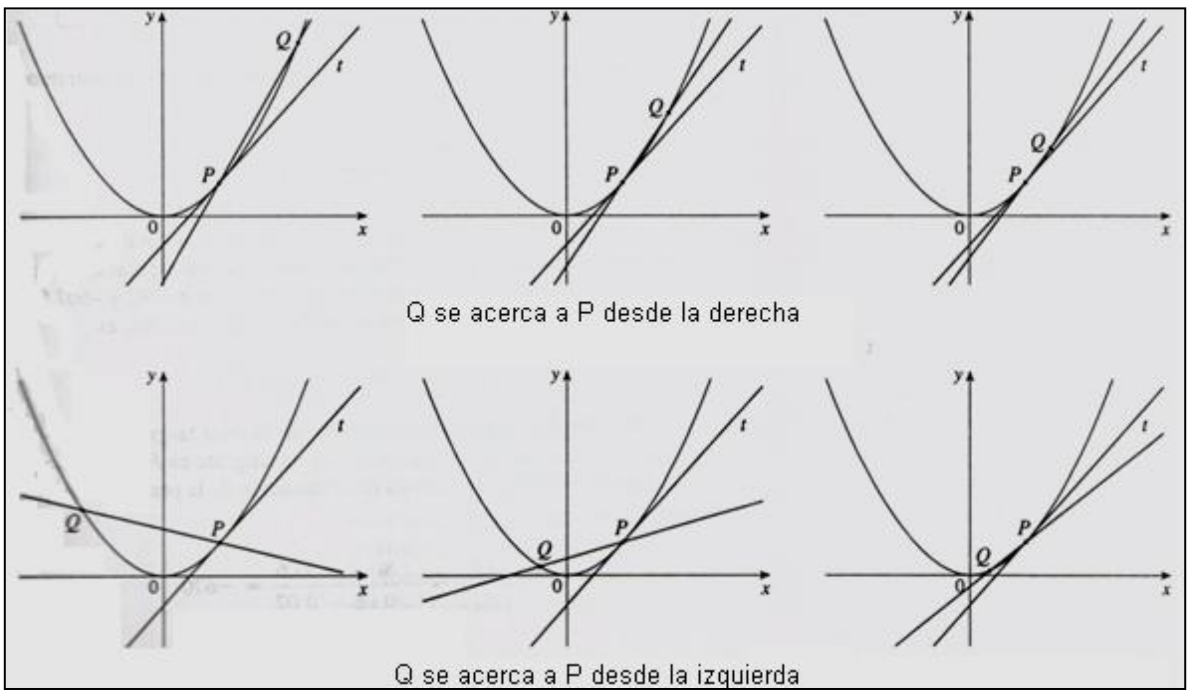


Fig. 4

3.1. Concepto de continuidad y discontinuidad de una función

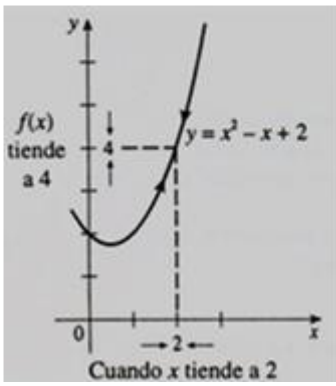
Es importante señalar que las curvas que se estudian en este curso representan funciones ***continuas,*** en su concepto más elemental esto quiere decir que son curvas simples, cuyos puntos que la describen están todos conectados sin sufrir saltos o fracturas, una curva de este tipo se puede dibujar en un trazo sin levantar el lápiz del papel

Las curvas que presentan saltos, fracturas o huecos en uno o varios puntos se les llaman ***discontinuas.***

4.1. Definición formal de límite y su metodología de cálculo

Hemos visto en la sección anterior como surgen los límites cuando se desea hallar la tangente a una curva, ahora enfocaremos nuestra atención al estudio de los límites en general y los métodos para calcularlos.

A modo de ejemplo veamos cómo se comporta la función definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ *para valores cercanos a 2*. En la siguiente tabla se dan los valores calculados para valores de *x* cercanos a 2, pero sin tocar a este. Observe que en la parte izquierda de la tabla el límite se aproxima por la izquierda y viceversa.



x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.971000	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

Fig. 5

De acuerdo a la gráfica y tabla mostradas, podemos apreciar que cuando *x* se aproxima a 2, ya sea por la derecha o por la izquierda *f(x)* se acerca a 4. Obsérvese que podemos acercar los valores de *f(x)* a 4 **tanto como lo queramos** si damos un valor a *x* muy cercanos a 2. Esto lo podemos expresar al enunciar "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$, cuando hacemos tender *x* a 2, es igual a 4". La notación que nos describe esta expresión es:

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 2^2 - 2 + 2 = 4$$

Definición: Si simbolizamos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Y decimos "el límite de *f(x)* ,cuando x tiende a *"a"*, es igual a L.

Esto se cumple si acercamos los valores de *f(x)* a L tanto como queramos escogiendo un valor de x lo suficientemente cerca de *"a"* pero no igual a este.

5.1. Calculo del límite de una función

Aunque en un estudio más formal sobre límites podemos encontrar una gama más extensa sobre sus propiedades, aquí solo veremos algunos de ellos que son esenciales para los propósitos de este curso.

1. Si “c” es una constante, el límite de “c” cuando “x” tiende a “a”, es igual a “c”

Ejemplo $$\lim_{x \to a} 8 = 8$$

2. El límite de “x” cuando “x” tiende a “a”, es igual a “a”

Ejemplo $$\lim_{x \to 3} x = 3$$

3. Si “c” es una constante y *f(x)* una función, el límite del producto de la constante por la función cuando “x” tiende a “a”, igual al producto de la constante por el límite de función.

Ejemplo $$\lim_{x \to 3} 5x = 5\,(3) = 15$$

Si la función dada esta simplificada, se sustituye directamente el valor al que tiende la variable independiente en la función

6.1. Ejercicios resueltos

1. Calcular el límite de la función $y = x^2 + 2x - 1$ cuando $x \to 2$

$$\lim_{x \to 2} (\, x^2 + 2x - 1) = 2^2 + 2(1) - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$$

Obsérvese la aplicación de las propiedades 1 y 2.

2. Calcular el límite de la función *f(x) = (2x + 3)*

$$\lim_{x \to 2} (2x + 3\,) = 2(2) + 3 = 4 + 3 = 7$$

- Calcule el límite de la función

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x+2} = \frac{3-2}{3+2} = \frac{1}{5}$$

4. Calcular el límite de la función

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} = \frac{4-4}{4+4} = \frac{0}{8} = 0$$

5. Calcular el límite de la función

$$\mathbf{Lim}_{x\to 4}\sqrt{25-x^2} = \sqrt{\mathbf{lim}_{x\to 4}\, 25-4^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$$

7.1. ESTRATEGIAS CENTRADAS EN EL APRENDIZAJE: Ejercicios propuestos.

Calcule los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 2} (x^2 - 4x)$

c) $\lim_{x\to 2} (3x^3 - 2x + 7)$

d) $\lim_{x\to 4} \sqrt[3]{x^2 - 5x - 4}$

b) $\lim_{x\to -1} (x^3 + 2x^2 - 3x - 4)$

e) $\lim_{x\to 4} (5x^2 - 9x - 8)$

f) $\lim_{x\to -2} \sqrt{x^4 - 4x + 1}$